

### 6.3 Примеры расчетов процессов обработки металлов давлением инженерным методом.

Пример расчета плоского течения металла между двумя параллельными шероховатыми плитами (осадка прямоугольной полосы неограниченной длины) полученное из решения дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием пластичности.

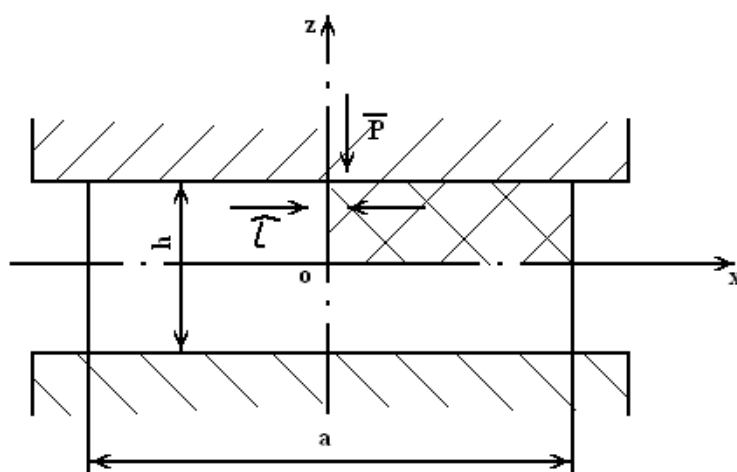


Рисунок 6.1 - Схема процесса осадки.

При осадке механическая схема деформированного состояния – сжатие, т.е. деформация в направлении деформации, совпадающее с направлением приложенной нагрузки отрицательная, а две другие положительные. При отсутствии сил трения на контактной поверхности механическая схема напряжений – линейное сжатие, при трении больше 0 – всестороннее неравномерное сжатие.

а) Экспериментально установлено – чем больше отношение контактной поверхности  $F_{\text{конт}}$  к свободной  $F_{\text{своб}}$  ( $\frac{F_{\text{конт}}}{F_{\text{своб}}}$ ), тем больше необходимо усилие и удельное давление.

б) Касательные напряжения по сечению заготовки распределим таким образом, что на контактной поверхности  $\tau_{\text{max}}$  ( $\tau_k = k$ ), а на оси  $\tau=0$ .

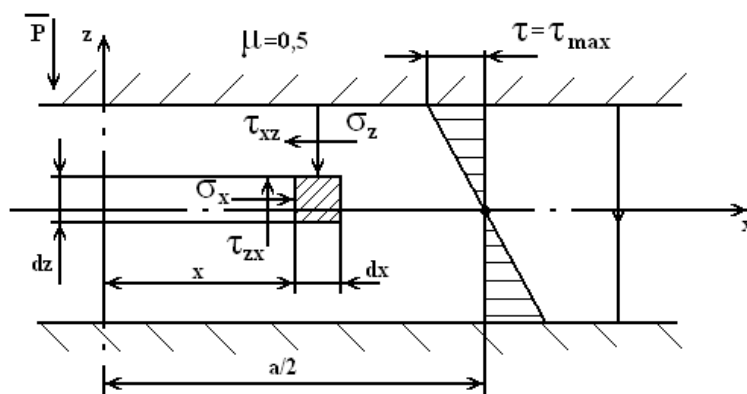


Рисунок 6.2 - Схема напряжений при осадке прямоугольной полосы неограниченной длины.

Определить распределение нормальных напряжений (касательных напряжений) только на контактной поверхности.

Решение, полученное точным решением дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием пластичности. Вследствие симметрии процесса при решении задачи рассмотрим только 1/2 часть заготовки.

1) Примем, что трение на контактной поверхности максимальное  $\mu=0,5$ , следовательно, контактное касательное напряжение  $\tau_k = \tau_{\max}$ .

Выделим в заготовке элементарный параллелепипед со сторонами  $dx, dz$  на гранях которого действуют нормальные и касательные напряжения (см. рис. 6.2).

Нормальное напряжение –  $\sigma$  на контактной поверхности не зависит от координаты  $z$ , так как значение  $z$  является величиной постоянной величиной вдоль всей поверхности ( $z=0,5h$ ), а  $x$  – переменная величина, лежит в диапазоне -  $0 < x < a/2$ .

Так как напряжения являются зависимыми только от координаты  $x$ , то перепишем их в простых производных

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dx}; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{d\sigma_z}{dz} \quad (a)$$

2) Касательные напряжения на контактной поверхности при  $z=0,5h$ ,

$$\tau_{xz} = \tau_k \quad (\tau_k = k)$$

Запишем дифференциальное уравнение равновесия в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (б)$$

Допустим, что  $\tau_{xz} = f(z)$  - линейная. Тогда проинтегрировав уравнение равновесия по  $z$ :

$$\int_0^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz + \int_0^{h/2} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = 0$$

Так как принятое ранее  $\sigma_x$  не зависит от  $z$ , а  $\tau_{xz} \Big|_0^{h/2}$ , получим

$$\frac{d\sigma_x}{dx} z \Big|_0^{h/2} + \tau_{xz} \Big|_0^{h/2} = 0$$

После подстановки получаем уравнение

$$d\sigma_x/dx + 2\tau/h = 0 \quad (в)$$

3) Для решения полученного уравнения предположим, что  $\tau_k$  пропорционально нормальному давлению на контактной поверхности (с одинаковым отрицательным знаком)  $\tau_k = \mu\sigma_z$ .

Приняв условие пластичности вида

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial x}$$

можем переписать уравнение (б) подставив вместо  $\tau_{xz} = \tau_k$ , а  $dz = h/2$

$$\frac{d\sigma_z}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

Примем, что  $\tau_k = \mu\sigma_z$ , запишем,

$$\frac{d\sigma_z}{dx} + \frac{2\mu\sigma_z}{h} = 0$$

Далее производя интегрирование и принимая  $x=0,5a$ ,  $\sigma_z = -\sigma_s^*$ , получим значение

$$\sigma_z = -\sigma_s \exp \frac{2\mu(0,5a-x)}{h} \quad (\Gamma)$$

Пояснение:

$$\exp(x) = e^x$$

(exp – функция обратная)

$$e = 2,718281$$

Полученная формула (г) дает возможность построить эпюру распределения нормальных и касательных напряжений на контактной поверхности.

4) Построим эпюру напряжений по уравнению (г) для различных значений  $x$  ( $0; 0,5a; a$ ) (рис. 6.3)

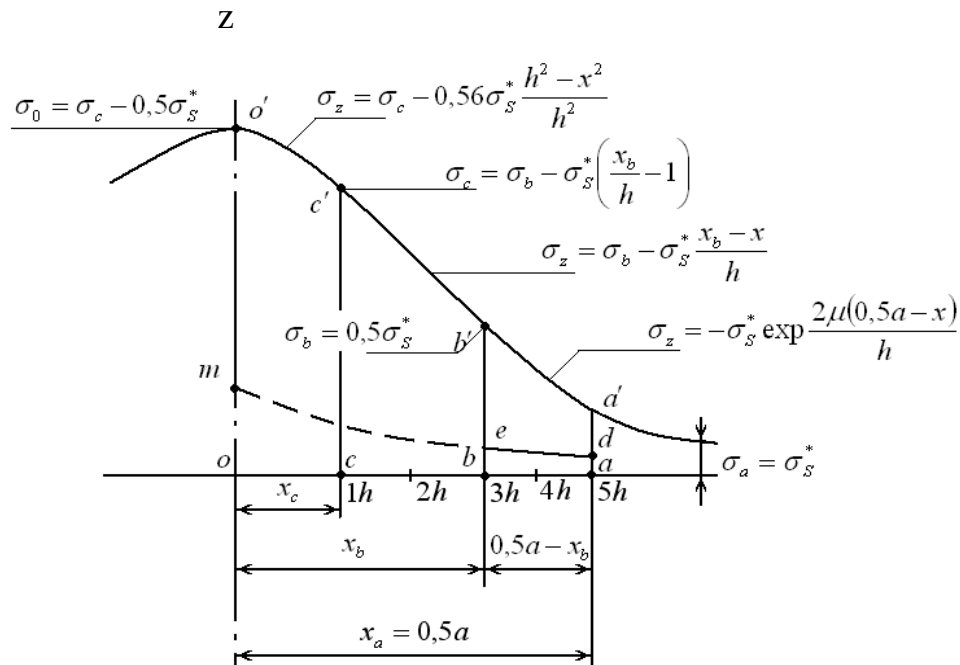


Рисунок 6.3 - Эпюра напряжений  $\sigma_z$  и  $\tau$

Из построенной эпюры видно, что интенсивность роста напряжений  $\sigma_z$ , а также  $\tau_k$  увеличивается к оси симметрии  $z$  сечения полосы

В точке  $b$  на контактной поверхности, при  $x = x_b$ , контактное касательное напряжение  $\tau_k = \tau_b = 0,5\sigma_s^*$ , так как  $\tau_k = \mu\sigma_z$ , а  $\sigma_z = \sigma_b = 0,5 \cdot \sigma_s^* / \mu$ , так как  $\tau_k = \mu \cdot \sigma_b$ .

При  $x < x_b$ , если  $\sigma_z$  определится по уравнению (г) и  $\tau_k = \mu\sigma_z$ , подставив  $\sigma_z$  получим  $\tau_k > 0,5\sigma_s^*$ . Что невозможно. Следовательно, формула (г)

действительна при таких значениях  $x$ , при которых  $\tau_k = |\mu\sigma_z| < 0,5\sigma_s^*$ , то есть при

$$|\sigma_z| < 0,5 \frac{\sigma_s^*}{\mu}$$

Следовательно, должно соблюдаться неравенство

$$\sigma_s^* \exp \frac{2\mu(0,5a - x)}{h} \leq \frac{0,5\sigma_s^*}{\mu}$$

Решив которое относительно  $x$ , получим

$$x \geq 0,5a + \frac{h \ln 2\mu}{2\mu}$$

Введем обозначение ( $-\psi = \frac{\ln 2\mu}{2\mu}$ ), получим

$$x \geq 0,5a - \psi \cdot h$$

Подставим в формулу (г) для различных значений  $\mu$  получим:

-чем больше коэффициент поверхностного трения, тем на меньшем участке контактной поверхности действительно выражение  $\tau_k = \mu\sigma_s^*$ , т.е тем скорее касательные напряжения достигают предельного значения  $|\tau_k| = 0,5 \cdot \sigma_s$ .

#### 6.4 Вариационные (энергетические) методы

Вариационный (энергетический) методы разработаны и используются для решения более сложных задач, связанных с расчетом полей напряжений и деформаций и их скоростей, а также для:

- прогнозирования разрушений, возникающих при неравномерной деформации;
- формирования макроструктуры изделий;
- образования деформационной текстуры.

Эти методы дают возможность решить любую краевую задачу теории ОМД с любой степенью точности.

Для процессов горячего деформирования был разработан **принцип виртуальных скоростей и напряжений**, а для процессов холодного деформирования – **принцип виртуальных перемещений и напряжений**.

С помощью вариационных принципов решаются задачи с 10-100 варьируемых величин с высоким приближением к действительным результатам.

Так как процессы ОМД сопровождаются большими пластическими деформациями, а металлы обладают сложными физико-механическими свойствами, то при решении задач энергетическими методами используется сопутствующая система координат, а тензоры рассматриваются в косоугольной системе координат. При этом все законы механики сплошной среды и их механические переменные (скорость течения, тензор скоростей деформации, тензор напряжений) остаются одними и теми же, отличие их заключается в написании формул и уравнений, связанных с применением криволинейной ортогональной системой координат.

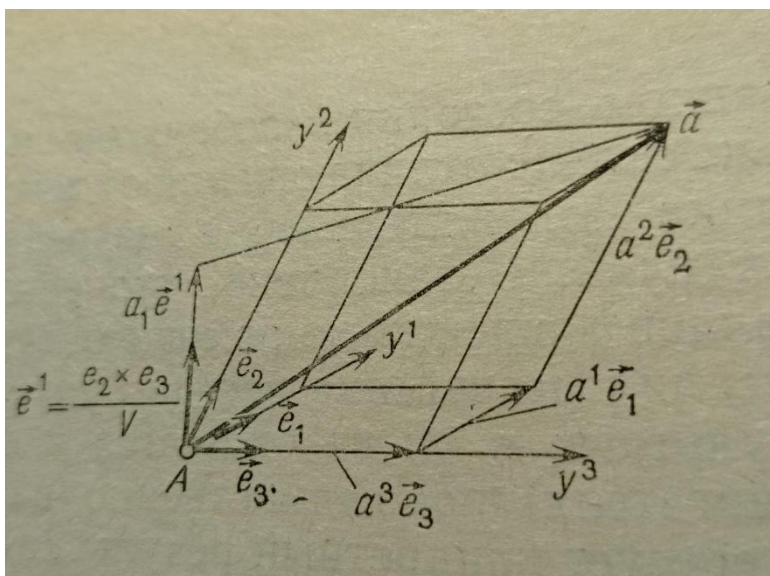


Рисунок 6.3. - Разложение вектора  $\vec{a}$  в косоугольной системе координат

Все вариационные методы основаны на использовании закона сохранения энергии. Они относятся к энергетическим методам (метод работ, метод баланса мощностей).

Теоретическую основу энергетического метода можно пояснить следующим примером.

Пусть тело, к которому приложены внешние силы находится в состоянии пластического течения и имеет форму, описываемую уравнением вида,

$$\Phi(x, y, z, t) = 0$$

Через бесконечно малый промежуток времени  $dt$  внешние силы совершат дополнительную работу -  $dA_{\text{в}}$ , а тело получит дополнительную деформацию. Тогда на основании закона сохранения энергии

$$dA_{\text{с}} = dA_{\text{д}} + dA_{\text{т}} \quad (6.12)$$

где  $dA_{\text{с}}$  - дополнительная работа внешних сил;

$dA_{\text{д}}$  - работа, затрачиваемая на преодоления внутренних сил сопротивления деформации;

$dA_{\text{т}}$  - работа, затрачиваемая на преодоления сил трения на контактных поверхностях.

$$dA_{\text{с}} = P_{\text{д}} \cdot du \quad (6.13)$$

где  $P_{\text{д}}$  - активная сила деформирования численно равная силе сопротивления деформации (величина переменная)

$du$  - бесконечно малое перемещение инструмента за время  $dt$ . Так как было принято условие, что время бесконечно мало ( $dt \rightarrow 0$ ), то можно считать, что активная сила величина постоянная на этом промежутке времени, т.е  $P_{\text{д}} = \text{const}$ .

Подставив выражение (6.13) в (6.12), получим:

$$P_{\text{д}} = \frac{1}{du} \cdot (dA_{\text{д}} + dA_{\text{т}}) \quad (6.14)$$

Формула (6.14) дает возможность рассчитывать деформирующее усилие ( $P_{\text{д}}$ ) в момент деформации  $t$ , если известны  $dA_{\text{д}}$  и  $dA_{\text{т}}$ .

Работу внутренних сил сопротивления деформации -  $dA_{\text{д}}$  за время  $dt$  определим, выделив в теле элементарный параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dz$ ,  $dy$ . На гранях этого параллелепипеда компоненты вектора полного напряжения ( $S_i$ ) вызовут перемещение каждой грани, величины которых  $du_x$ ,

$du_y, du_z$ . Тогда затрачиваемая работа на преодоление внутренних сил сопротивления деформации определится по формуле:

$$dA_\partial = \iint_F (S_x \cdot du_x + S_y \cdot du_y + S_z \cdot du_z) \cdot dF \quad (6.15)$$

Выразив напряжение  $S_x, S_y, S_z$  через компоненты тензора  $T_\sigma$  (см уравнения равновесия тетраэдра), получим

$$dA_\partial = \iint_F [(\sigma_x \cdot du_x + \tau_{xy} \cdot du_y + \tau_{xz} \cdot du_z) \cdot a_x + (\tau_{yx} \cdot du_x + \sigma_y \cdot du_y + \tau_{yz} \cdot du_z) \cdot a_y + (\tau_{zx} \cdot du_x + \tau_{zy} \cdot du_y + \sigma_z \cdot du_z) \cdot a_z] \cdot dF \quad (6.16)$$

Физический смысл уравнения (6.16) определяющего работу внутренних сил:

- полученное уравнение (6.16) выражает работу всех компонент тензора напряжений  $T_\sigma$  на соответствующих перемещениях в элементарном объеме деформируемого тела.

Преобразовав уравнение (6.16), используя условия равновесия и формулы Коши ( $\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} = 0$ ;  $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i}$ )

Учитывая, что девиаторы деформаций и напряжений связаны соотношением вида

$$D_\varepsilon = \lambda D_\sigma, \lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$$

Учитывая, что девиаторы деформаций и напряжений связаны соотношением вида,

$$D_\varepsilon = \lambda D_\sigma, \lambda = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}, \text{ можно определить компоненты деформаций и их приращений } d\varepsilon_i; d\gamma_{ij}, \text{ подставив которые в формулу (6.16), получим}$$

$$dA_g = \iiint_V \frac{d\varepsilon_i}{2\sigma_i} = \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\} dV \quad (6.17)$$

Выражение в квадратных скобках это  $2\sigma_i^2$ . Но по условию пластичности Губера-Мизеса  $\sigma_i = \sigma_T$ . Следовательно, уравнение (6.17) можно записать в индексном виде как,



$$dA_\partial = \iiint_V \sigma_S \cdot d\varepsilon_i \cdot dV \quad (6.18)$$

Определим работу сил трения  $dA_T$ . Она является величиной инвариантной.

Обозначим через  $F$  площадку контактной поверхности, которая произвольно ориентированна в пространстве.

Так как  $dA_T$  величина инвариантная, и не зависит от выбора системы координат, то можно ее расположить произвольным образом, например перпендикулярно оси  $Z$ .

Тогда величина полного вектора напряжения  $S$  на площадке  $F$  может быть разложена по осям  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ . Если ось  $Z$  совпадает направлением перемещения инструмента, то  $\sigma_z \cdot dF$  это работа сил сопротивления деформации,  $\tau_{xz} \cdot F$  и  $\tau_{zy} \cdot F$  будет работой сил трения  $dA_T$ .

На контактной поверхности  $F$ , вектор контактного касательного напряжения ( $\tau_k = \tau_{xz} + \tau_{yz}$ ) направлен в сторону противоположную направлению вектора перемещения инструмента –  $du$ . Его величина определится через компоненты перемещения по формуле,

$$du^2 = du_y^2 + du_x^2 \quad (6.19)$$

Тогда работу сил трения на поверхности  $F$  можно определить по формуле:

$$dA_T = \iint_F \tau_k \sqrt{du_x^2 + du_y^2} \cdot dF \quad (6.20)$$

Если ось  $z$ , например, перпендикулярна площадке контактной поверхности  $F$  и не совпадает с направлением перемещения инструмента  $du$ , то работа  $\sigma_z \cdot dF = 0$ , т.к. перемещение деформируемой заготовки в этом направлении ограничено поверхностью инструмента. В этом случае  $\sigma_z \cdot dF$  будет вызывать упругую деформацию инструмента и обуславливать его износ.

Следовательно, вычислив для данного момента деформирования приращения работы затрачиваемой на преодоление внутренних сил сопротивления деформации -  $dA_\delta$  и работа, затрачиваемая на преодоления сил трения на контактных поверхностях -  $dA_T$  на бесконечно малом перемещении инструмента  $du$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  можно по формуле (6.14) определить усилие деформирования  $P_\delta$

При решении задач энергетическим методом необходимо последовательно выполнять следующие действия.

1. Задаемся бесконечно малым перемещением инструмента -  $du$  и определяем во всем объеме -  $V$  приращения перемещения,

$$du_x=f_x(du) ; du_y=f_y(du) ; du_z=f_z(du) \quad (6.21)$$

2. На основании полученных функций приращения перемещений (6.21) находим компоненты девиатора приращения деформаций -  $Dd_\varepsilon$  и вычисляем приращение интенсивности деформаций  $d\varepsilon_i$

3. По формуле (6.18) находим  $dA_\delta=\Phi(du)=\iiint_V \sigma_{s_i} d\varepsilon_i \cdot dV$

4. По формуле (6.20) вычисляем  $dA_T=\Phi(du)=\iint_F \tau_k (\sqrt{du_k^2} + \sqrt{dl_k^2})dF$

5. По формуле (6/14) определяем усилие деформации подставив (5.13и 5.12), получим формулу вида,

$$P_g = \frac{1}{du} \bullet [\iiint \sigma_s d\varepsilon_i \bullet dV + \iint \sqrt{du_i^2 + du_j^2} \bullet dF] \quad (6.22)$$