

## **Тема 6: Методы теоретического анализа процессов ОМД.**

Все виды исследования процессов ОМД делятся на:

- 1 – аналитические;
- 2 – экспериментальные;
- 3 – экспериментально-аналитические.

*Аналитические* методы основаны на замене исследования реального физического объекта математической моделью, поведение которого с достаточной степенью точностью обращает поведение самого объекта.

*Модель процесса* – это упрощенное представление о реальном объекте.

При решении технологических задач обработки металлов давлением необходимо определять возникающие напряжения и деформации в зависимости от различных граничных условий, усилия деформирования, затраты энергии, выбирать оптимальные технологические параметры. Сложность решаемых задач в связи с развитием современных технологий создала предпосылки для создания методов исследований процессов ОМД основанных на основных законах механики сплошных сред, а именно на законах теории упругости, пластичности и прочности. Все существующие методы исследования и анализа процессов пластического формоизменения можно разделить на аналитические, экспериментальные и экспериментально-аналитические (табл. 6.1). По уровню сложности решаемые задачи ОМД можно разделить на четыре основных класса:

- задачи первого класса – это анализ силового режима (определение усилия и работы деформации);
- задачи второго класса – это расчет на прочность формоизменяющих деталей штампа и выбор рациональных параметров технологического процесса и конструкции рабочего инструмента позволяющих получить необходимые запасы прочности;
- задачи третьего класса – это задачи выбора рациональных размеров исходных заготовок и их промежуточных форм при многопереходной штамповке;

- задачи четвертого класса — это задачи предельного формоизменения, разработки такого технологического процесса, при котором не происходит исчерпание ресурса пластичности.

Анализ технологических процессов пластического формоизменения осуществляется различными в зависимости от поставленных задач. Каждый из методов имеет свои возможности, допуски и ограничения. Классы задач и их возможности и ограничения приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 - Возможности методов анализа технологических задач обработки давлением

№	Методы	Класс задач				Ограничения		
		1	2	3	4	А	Б	В
	<b>Аналитические</b>							
1	Прямого интегрирования	+	+	+	+			
2	Инженерный	+	+	+	–	по	–	уо
3	Метод линий скольжения	+	+	–	+	п, 1ст	тгп	бу
4	Энергетический	+	–	+	+	–	тп,боп	–
5	Прямой вариационный	+	+	+	+	–	тп,боп	–
6	Верхней оценки	+	–	+	–	по	тгп,тп	уо
7	Конечных элементов	+	+	+	+	–	тп,боп	–
	<b>Экспериментально - аналитические</b>							
1	Сопротивления пластическим деформациям материала	+	+	–	+	по	тэ	–
2	Визиопластический	+	+	+	+	по	тэ,сэт,тп	–
3	Муаровых полос	+	+	–	+	по	тэ,сэт,тп	–
4	Распределения твердости	+	+	–	+	по	тэ,сэт,тп	–

В таблице 6.1 введены следующие обозначения на ограничения для конкретных методов:

- А – на область применения метода (П – преимущественно для плоских задач; ПО – преимущественно для плоских и осесимметричных задач; 1СТ – для задач с одной степенью свободы течения металла);

- Б – на методику решения задач (ТПП – для задач с большим объемом графических построений и расчетов; ТП – для задач с проблемами отладки программ на ЭВМ; БОП – требуется большой объем памяти ЭВМ; ТЭ – задачи, требующие трудоемких экспериментов и их обработка; СЭТ – задачи для исследования которых необходимо применение специальной сложной техники и аппаратуры);
- В – на результаты решения задач (БУ – задачи решаемые без учета упрочнения материала; УО – задачи решаемые с осредненным учетом упрочнения).

Приведенные в таблице 6.1 аналитические методы основаны на замене исследования реального физического объекта математической моделью в виде системы интегро-дифференциальных уравнений, позволяющих с достаточной точностью прогнозировать поведение исследуемого объекта в основном в осесимметричных и плоских задачах. Однако принятые допущения в виде идеализации свойств, однородности и изотропности исследуемой среды и ограничения, наложенные на граничные условия, не дают получить результаты, соответствующие реальным процессам.

*Экспериментальными методами* исследуются реальные материалы в реальных условиях. С целью уменьшения затрат при исследовании задач ОМД используют методы подобия (геометрического, физического, масштабного). Они позволяют реализовывать натурные условия. Но для уменьшения затрат на проведение эксперимента часто исследования проводятся на геометрически или физически подобных моделях. Но и в этом случае тоже принимается ряд допущений, которые вносят ошибку в получаемые результаты. Это требует подтверждения результатов аналитических исследований с данными проведенных экспериментов.

**Экспериментально-аналитические методы** позволяют использовать экспериментальные данные для теоретического анализа технологических задач пластического формоизменения. Они дают возможность на основании экспериментальных исследований получать функции, описывающие приращения перемещений частиц исследуемого объекта, а затем используя определяющие уравнения сплошной среды проанализировать кинематику и динамику процесса деформирования. В результате этого появляется возможность определять нагрузки на инструмент и прогнозировать процесс формоизменения.

## **6.1 Расчеты процессов ОМД на основе совместного решения уравнений равновесия и условия пластичности.**

### **Основы расчетного подхода.**

Этот метод заключается в совместном решении системы из дифференциальных уравнений равновесия и условия пластичности.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \times (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} = \sigma_T \quad (6.2)$$

Уравнения пишут в форме: 1) для объемного, осесимметричного; 2) плоского напряженного состояния; 3) плоского деформированного состояния; и в координатах: прямоугольных, цилиндрических, полярных, сферических.

### ***Задание граничных условий.***

При наличии трения необходимо задать условия трения, определяющие касательные напряжения на поверхности контакта в двух формах: 1) контактные касательные напряжения считают независимыми от координаты, по которой они направлены, то есть постоянным (см. выражение 1)); 2) считают, пропорциональные нормальным напряжениям на поверхности контакта (см. выражение б))

$$\text{а) } \tau_k = \mu_s \beta \sigma_s$$

$$\text{б) } \tau_k = \mu \sigma_n$$

$\beta$  – переменный коэффициент

$$1 < \beta < 1,155$$

Если задача представляется статически неопределимой, то дополнительно используют связи между напряжениями и деформациями и уравнения неразрывности деформации.

Решение должно дать величину и распределение напряжений по всему объему тела. Такое решение возможно лишь в отдельных частных случаях и то при отсутствии (или в предположения отсутствия) сил трения на контактных поверхностях.

Разберем теперь возможности решения дифференциальных уравнений равновесия для различных видов пластически напряженного состояния.

1) При объемном напряженном состоянии мы располагаем тремя уравнениями равновесия, в которые входят шесть неизвестных (три нормальных и касательных напряжения) и условие пластичности, заключающее те же известные.

В четырех уравнениях шесть неизвестных – задача дважды статически неопределима. Дополнительно можно использовать уравнения связи между напряжениями и деформациями и уравнения неразрывности деформаций, которые внесут, однако, новые неизвестные (шесть деформаций и модуль пластичности). В результате можно получить 13 уравнений с 13 неизвестными. Практически решение такой системы невозможно.

2) Для осесимметричного напряженного состояния есть два уравнения равновесия, содержащие четыре неизвестных, и условие пластичности, в которое входят те же неизвестные. Таким образом, осесимметричная задача так же, как и объемная, статически неопределима, и для решения ее требуется привлечение уравнений связи между напряжениями и деформациями (четыре уравнения, которые внесут четыре новых неизвестных) и уравнения совместимости деформаций. Всего получим восемь уравнений с восьмью неизвестными. Отсюда следует, что осесимметричная задача значительно проще объемной. Однако точные замкнутые решения этой задачи существуют только для отдельных частных случаев:

- когда касательные напряжения на контактной поверхности отсутствуют;
- зависит только от одной из двух координат, входящие в уравнения равновесия.

3) Для плоского напряженного и плоского деформированного состояний располагаем двумя уравнениями равновесия в декартовых координатах или в полярных координатах и условием пластичности. В этих трех уравнениях содержится три неизвестных. Таким образом, число уравнений соответствует числу неизвестных. Тем не менее для системы уравнений этой задачи существуют точные замкнутые решения тоже лишь для частных случаев:

- при касательных напряжениях на контактной поверхности, равных нулю;
- при контактных напряжениях не зависящих от одной из двух координат, входящих в уравнения равновесия.

Метод интегрирования дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием пластичности дает точные замкнутые решения для следующих осесимметричных и плоских задач: пластическое равновесие толстостенной трубы под действием внутреннего и внешнего давлений (А Надаи ); 2) сжатие бесконечной полосы между шероховатыми плитами при

$T_k = const$  (Л. Прандтль); 3) сжатие клина (А. Надаи); равновесие пластической массы, заполняющей форму конуса (В.В. Соколовский); 5) осадка без трения толстостенной трубы, замкнутой в матрицу (Л. Г. Степановский) и др.

## 6.2 Инженерный метод

На основе детального теоретического анализа возможности введения упрощающих допущений Е. П. Унксов разработал метод составления и использования приближенных уравнений равновесия совместно с условием пластичности.

Сущность метода заключается в следующем:

- любую решаемую задачу необходимо привести к осесимметричной или плоской, и в случае сложности формы деформированного тела необходимого разбить его на ряд объемов, на которые можно наложить условия осесимметричной или плоской задачи;

- распределение нормальных напряжений определяется только для контактной поверхности (что и требуется для вычисления удельного усилия деформирования) и не определяется распределение напряжений внутри тела;

- дифференциальные уравнения равновесия, взятые в форме и координатах, отвечающих условиям задачи, упрощают.

Упрощение нормальных напряжений заключается в следующем:

- нормальные напряжения принимают зависимыми только от одной из координат;

- зависимость касательных напряжений от соответствующей координаты принимают линейной;

- число дифференциальных уравнений равновесия сократится до одного, содержащего простые производные.

- условия пластичности используют также приближенные.

При анализе операций обработки металлов давлением используют дифференциальными уравнениями равновесия в произвольных осях — уравнение (6.1).

Следовательно, условием пластичности должно быть записано тоже в произвольных осях – уравнение (6.2). Такие уравнения являются нелинейными, что затрудняет совместное решение даже для осесимметричной и плоской задач.

Упрощение этих уравнений заключается в приведении к линейным уравнениям. Тогда, условие пластичности в случае плоского деформированного состояния при ( $\beta = 2/\sqrt{3} = 1,155$ ) и когда равны два из трех главных нормальных напряжений ( $\beta = 1$ ), запишем в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \beta \sigma_T \text{ - условие пластичности}$$

Такая запись возможна, когда касательное напряжение бесконечно мало, т.е. если  $\tau \ll \sigma$

а) при осесимметричном напряженном состоянии, в цилиндрической системе координат, когда  $\sigma_\rho \neq \sigma_\theta \neq \sigma_z$

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \beta \sigma_s \quad (6.3a)$$

или

$$\sigma_\theta - \sigma_z = \pm \beta \sigma_s \quad (6.3б)$$

или

$$\sigma_\rho - \sigma_z = \pm \beta \sigma_s \quad (6.3в)$$

в зависимости от того, какая из разностей представляет собой разность крайних напряжений;

б) при осесимметричном напряженном состоянии, когда  $\sigma_\rho = \sigma_\theta$

$$\sigma_\rho - \sigma_\theta = \pm \sigma_s \quad (6.4)$$

в) при плоском деформированном состоянии при  $\sigma_y = \sigma_{cp}$

$$\sigma_x - \sigma_z = \pm \sigma_s \quad (6.5)$$

г) при плоском напряженном состоянии

$$\sigma_x - \sigma_z = \pm \beta \sigma_s, \text{ при } \sigma_x \cdot \sigma_z < 0; \quad (6.6a)$$

$$\sigma_x = \pm \beta \sigma_s, \text{ при } \sigma_x \cdot \sigma_z > 0 \text{ и } |\sigma_x| > |\sigma_z|; \quad (6.6б)$$

$$\sigma_z = \pm \beta \sigma_s, \text{ при } \sigma_x \cdot \sigma_z > 0 \text{ и } |\sigma_z| > |\sigma_x|. \sigma_s \quad (6.6в)$$



В случае, когда контактные касательные напряжения  $\tau_k \rightarrow k$  уравнения 6.3-6.6 не работают

Для значений  $\tau_k \rightarrow k$  используются условие пластичности для осесимметричного напряженного состояния и плоского напряженного состояния запишем в форме:

$$\frac{\sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2}}{\sqrt{2}\sigma_T} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{\rho\theta}^2}{k^2}} \quad - \quad \text{для осесимметричного}$$

напряженного состояния; (6.7),

$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sigma_{T^*}} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{xz}^2}{k^2}} \quad - \quad \text{для плоского напряженного}$$

состояния (6.8).

Уравнения (6.7) и (6.8) работают при любых значениях  $\tau$ . Если  $\tau = 0$ , то из этих уравнений получаются выражения (6.3), (6.4), (6.5). При значениях  $\tau_k = k$ , получаем

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z \quad \text{или} \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \quad (6.9)$$

в зависимости от того какая решается задача

$$\sigma_{T^*} = \beta\sigma_T \quad k = \frac{\sigma_m}{\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_m}{2}$$

Следовательно, левые части уравнений (6.7) и (6.8) выражающие соотношение между нормальными напряженными и постоянной  $\sigma_s$ , являются функцией касательного напряжения  $\tau$ . Величина  $\tau$  может изменяться в пределах от нуля до максимальной величины, равной  $k$ .

При подстановке  $\tau=k$  в уравнение (6.7) следует учесть, что сумма квадратов разностей напряжений  $\sigma$  может быть равна нулю только при равенстве этих напряжений следовательно  $\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z$ . Из уравнения (6.8) при  $\tau=k$  получается  $\sigma_x = \sigma_z$ , поскольку  $\sigma_y = 0,5(\sigma_x + \sigma_z)$ , то и

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_\theta = \sigma_z \\ \sigma_y &= \sigma_x = \sigma_z \end{aligned} \quad (6.10)$$

Таким образом, выражения (6.3) – (6.6) можно считать действительными при  $0 < \tau_k < 0,7k$ , приближенные же выражения (6.9) применимы в случае  $0,7k < \tau < k$ .

При решении практических задач условие пластичности необходимо для того, чтобы выразить производную одного напряжения по данной координате через производную другого напряжения по той же координате. Исследуем этот вопрос.

Для этого дифференцируем уравнение пластичности для осесимметричного напряженного состояния, когда  $\sigma_\rho = \sigma_\theta$  и для плоского деформированного состояния по какой-либо координате, например соответственно по  $\rho$  или  $x$ , получим следующие выражения для осесимметричного и плоского

$$(\sigma_\rho - \sigma_z) \left( \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial \rho} \right) = 3\tau_{\rho z} \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} \quad (6.11)$$

$$(\sigma_x - \sigma_z) \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} \right) = 4\tau_{xz} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}$$

Если значение  $\tau$  не зависит от координаты  $\rho$  или  $x$  (например, постоянны или изменяются параметрически), то правые части уравнений (6.11) обращаются в нуль. Так как разности нормальных напряжений в левой части уравнений в общем случае не равны нулю, получим

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial \rho} \text{ или } \partial \sigma_\rho = \partial \sigma_z \quad (6.11a)$$

-для осесимметричного напряженного состояния при  $\sigma_\rho = \sigma_z$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} \text{ или } \partial \sigma_x = \partial \sigma_z \quad (6.11b)$$

-для плоского деформированного состояния.

Вывод.

- полученные уравнения (6.11a) и (6.11б) представляют собой выражения условия пластичности в дифференциальной форме;
- при любых не зависящих от данной координаты значениях  $\tau$  выражения (6.11) будут точным условием пластичности для указанных видов напряженного состояния;
- если же значения  $\tau$  зависят от данной координаты, то выражениями (6.11) можно пользоваться как приближенными.